Introduzione alla Gravitazione

Prof. Michelangelo Agnello

Politecnico di Torino
II Facoltà di Ingegneria
Sede di Vercelli

Significato di Corpo Puntiforme

Corpo Puntiforme o Punto Materiale:

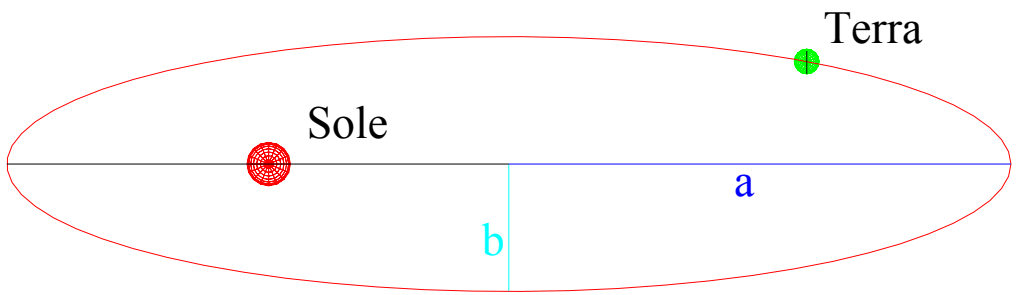
In Fisica, per corpo puntiforme o punto materiale, si intende un corpo, di dimensioni trascurabili rispetto alle distanze percorse e quindi al sistema in cui questo si muove e nel quale ha o può avere interazioni.

I corpi possono avere le più svariate forme, dimensioni e caratteristiche e una trattazione completa del loro moto, dal punto di vista cinematico e dinamico, può risultare molto complessa. In molti casi si può ricorrere alla *schematizzazione di corpo puntiforme*, che consiste nel trascurare le dimensioni reali dei corpi rappresentandoli, ai fini della descrizione cinematica e dinamica, come punti geometrici, cioè entità astratte prive di dimensioni. Questa schematizzazione, nei casi in cui sia possibile applicarla, consente notevoli semplificazioni, senza essere troppo riduttiva. Perciò a seconda delle esigenze e dell'osservatore un corpo può essere al tempo stesso puntiforme e non puntiforme. Ad esempio, per un osservatore che sta sulla terra e studia il moto di un oggetto in vicinanza della superficie terrestre, la terra apparirà tutt'altro che puntiforme. Nello stesso istante un secondo osservatore posto molto lontano nello spazio troverà la terra assolutamente puntiforme.

Leggi di Keplero (1571-1630)

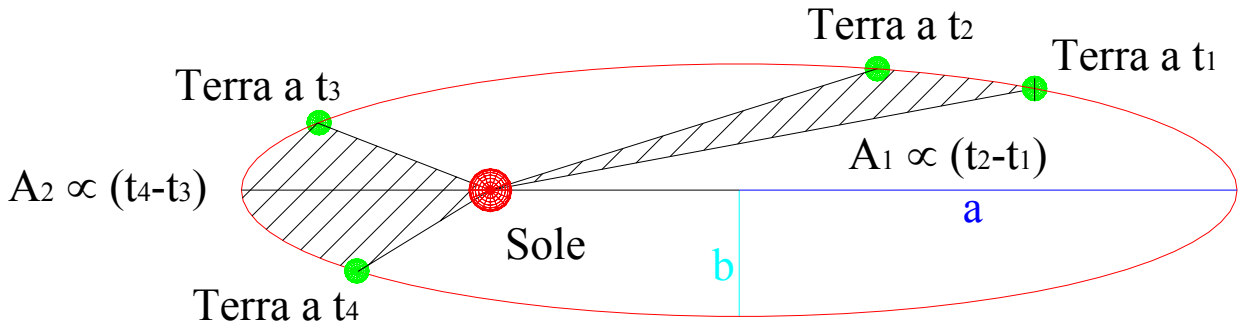
Da osservazioni desunte dai dati di Tycho Brahe e dalle proprie rilevazioni sperimentali sul moto dei pianeti, Keplero enunciò le seguenti tre leggi.

Prima Legge: *le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di sui il Sole occupa uno dei fuochi.*



Leggi di Keplero (1571-1630)

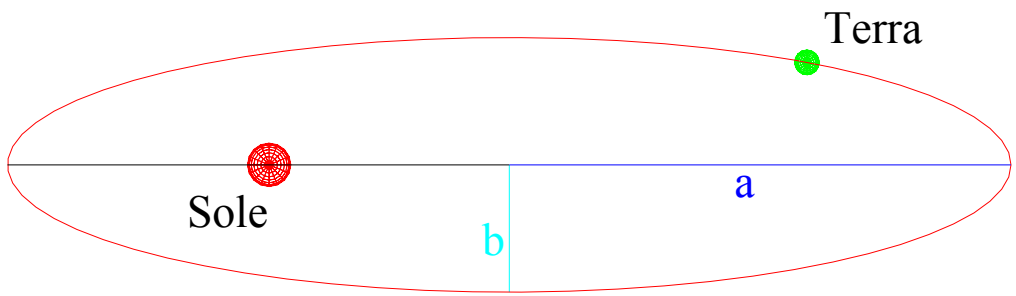
-**Seconda Legge**: *il raggio vettore che congiunge il centro del Sole col centro di ogni pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.*



Se $(t_4 - t_3) = (t_2 - t_1)$ allora $A_2 = A_1$

Leggi di Keplero (1571-1630)

-**Terza legge**: *i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite ellittiche.*

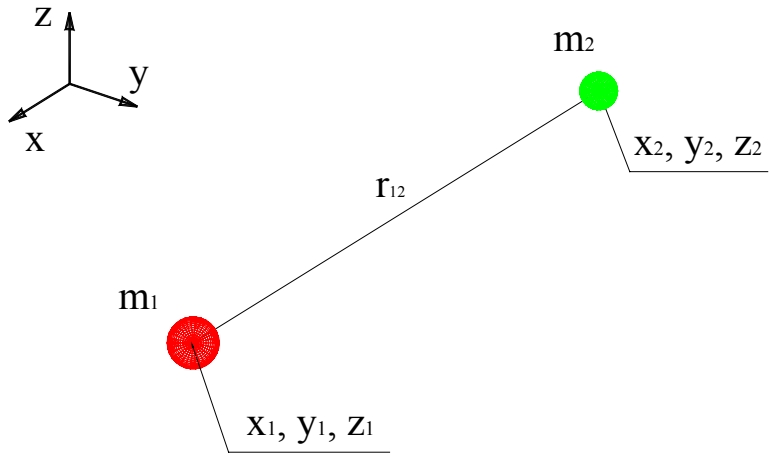


$T^2 \propto a^3$

Legge della Gravitazione

- Isaac Newton (1642-1727) intuì che la legge che governa la caduta dei corpi sulla terra è la stessa che governa il moto dei corpi celesti.

Legge della Gravitazione



$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Due masse puntiformi m_1 e m_2 a distanza r_{12} una dall'altra sono soggette ad una forza gravitazionale, attrattiva, data in modulo da

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Legge della Gravitazione

Costante di Gravitazione Universale nel Sistema Internazionale (S.I.)

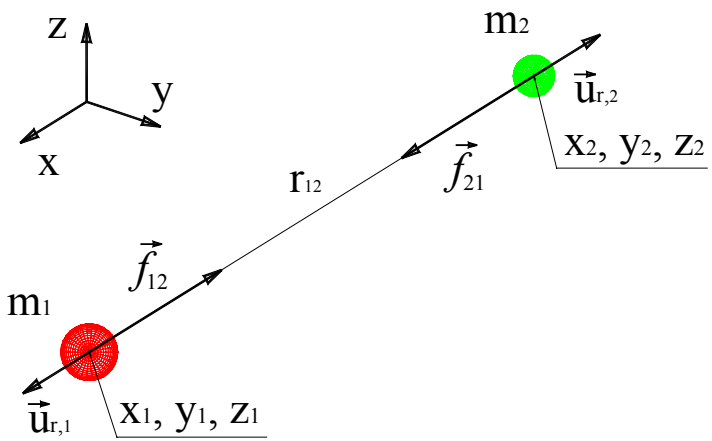
$$f = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^{\,2}}$$

$[r]$ = m (metro)
$[m]$ = kg (chilogrammo)
$[f]$ = $kg \cdot m \cdot s^{-2} = N$ (Newton)

$G = 6.673 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} s^{-2}$ Costante di Gravitazione Universale

Forma vettoriale della forza

La forza è una grandezza vettoriale



$$r_{12}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

La forza gravitazionale perciò è data da

$$\vec{f}_{12}=-G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{r,1} \qquad \vec{f}_{21}=-G\frac{m_2 m_1}{r_{12}^2}\vec{u}_{r,2}$$

Forma vettoriale della forza

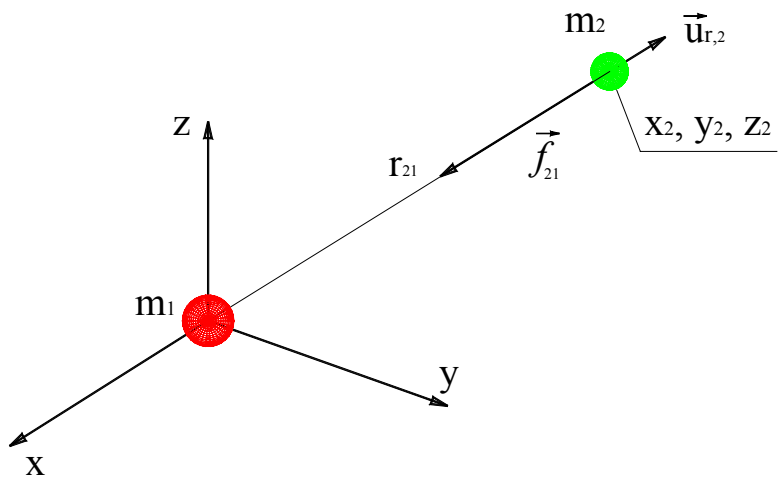
La forma generale della forza gravitazionale agente tra corpi puntiformi è

$$\vec{f} = -G\frac{m_2 m_1}{r^2}\vec{u}_r$$

Forza centrale

Questa forza viene detta Forza Centrale

$$\vec{f}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^{\,2}}\vec{u}_{r,2}$$



Osservazioni sulla legge

$$\vec{f} = -G\frac{m_2 m_1}{r^2}\vec{u}_r$$

- Le masse m_1 e m_2 sono puntiformi (ci sono eccezioni)
- Non è più valida in zone dove le forze gravitazionali sono molto intense. Ad esempio vicino a stelle di neutroni (molto compatte, 1 cucchiaino di neutroni avrebbe una massa di qualche miliardo di tonnellate) o a buchi neri. In questo caso occorre ricorrere alla Relatività Generale di A. Einstein.

  Anche il pianeta Mercurio che ruota molto vicino al sole, risentendo di una forte forza gravitazionale, segue un orbita leggermente diversa (anche se di poco) da quella prevista dalla legge di Newton, ma in accordo con la teoria di Einstein.

Massa inerziale e gravitazionale

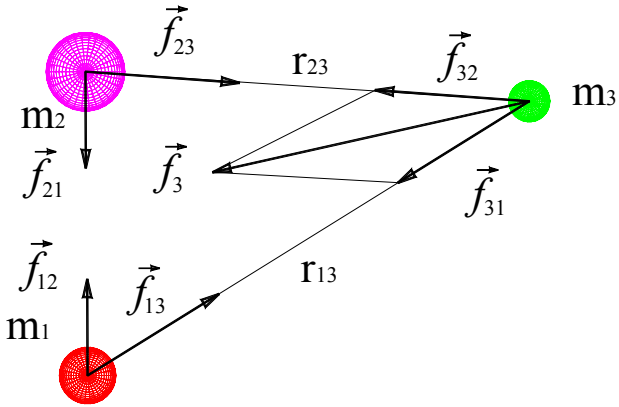
$$\vec{f} = -G\frac{m_2 m_1}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

Nella seconda legge della dinamica **F** = m**a** la massa è inerziale. Nella Legge della Gravitazione Universale la massa è gravitazionale. Le due masse coincidono ?

Al momento la Relatività Generale ha dato la risposta di coincidenza delle masse.

Somma delle forze

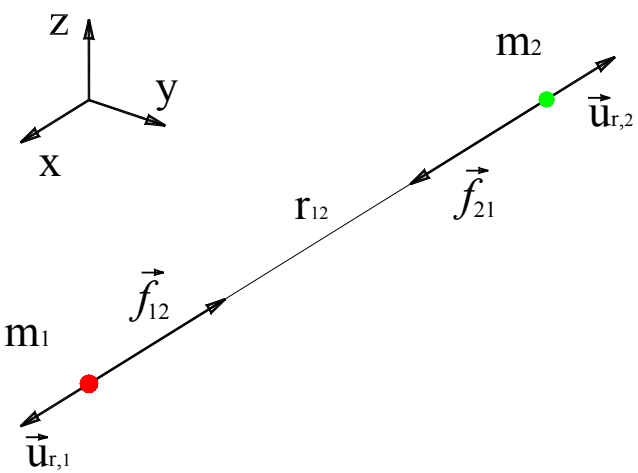


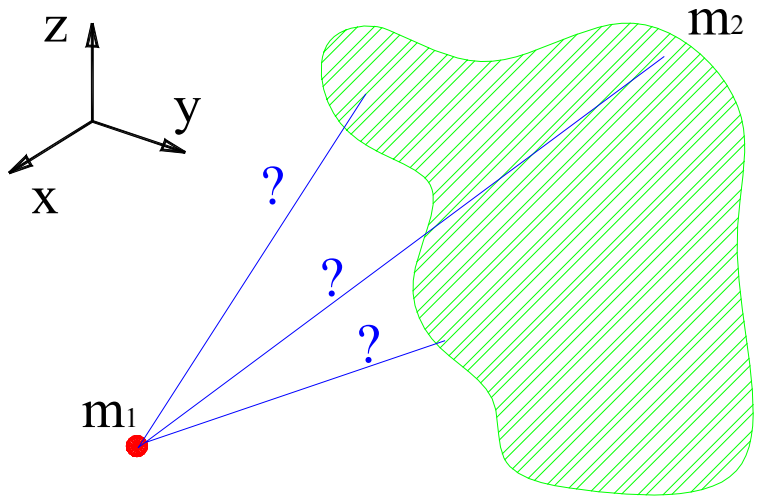
Se un corpo puntiforme di massa m_3 è soggetto alla forza gravitazionale esercitata da altri due corpi di masse m_1 e m_2 rispettivamente, allora la forza totale su m_3 è

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32}$$

La legge per masse non puntiformi

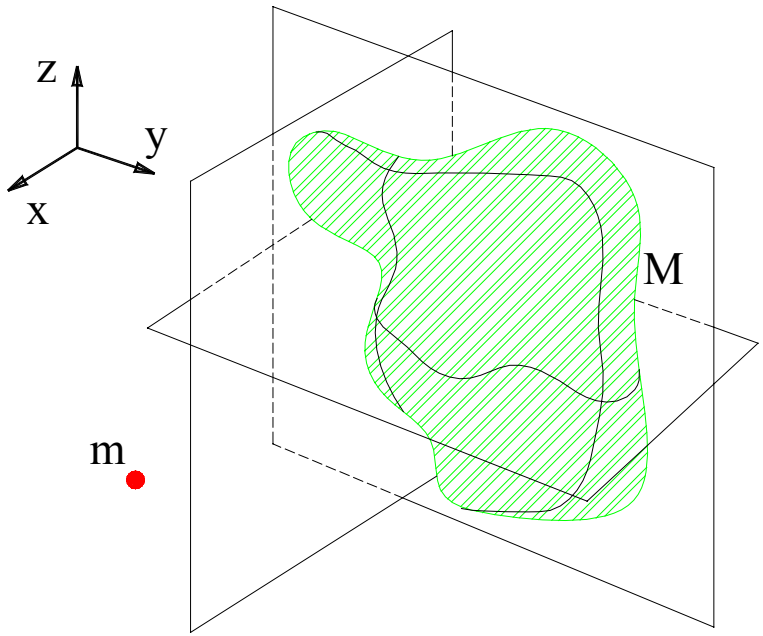
$$\vec{f} = -G\frac{m_2 m_1}{r^2}\vec{u}_r$$



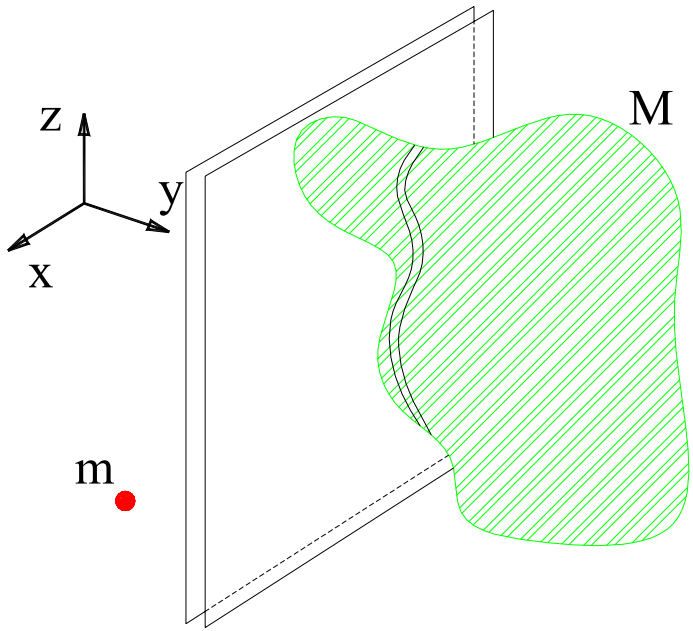


Una massa non puntiforme

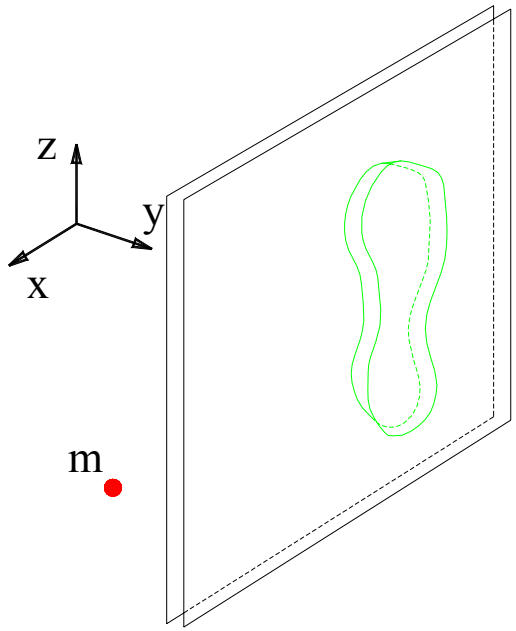
$$\vec{f} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$



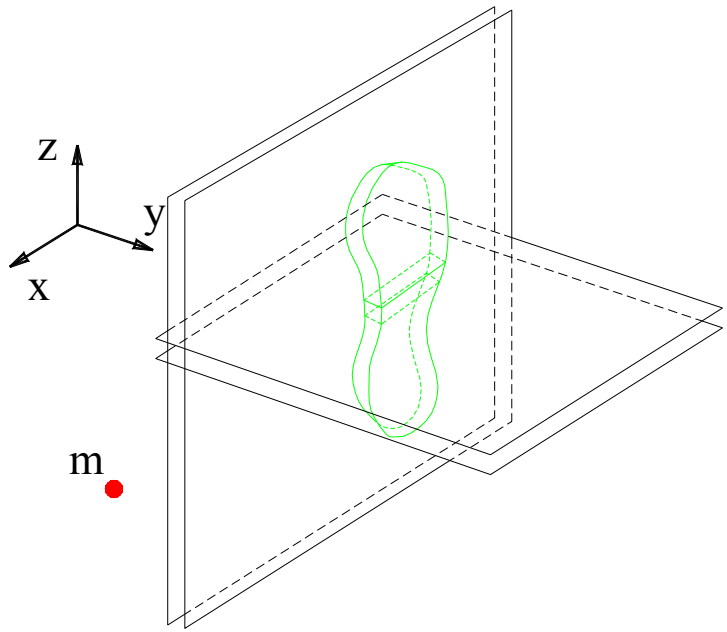
Una massa non puntiforme



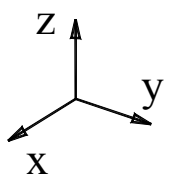
Una massa non puntiforme

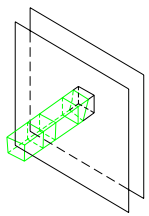


Una massa non puntiforme



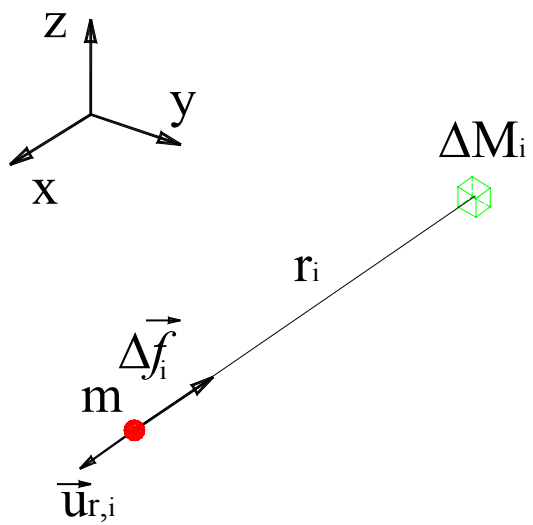
Una massa non puntiforme





m

Una massa non puntiforme

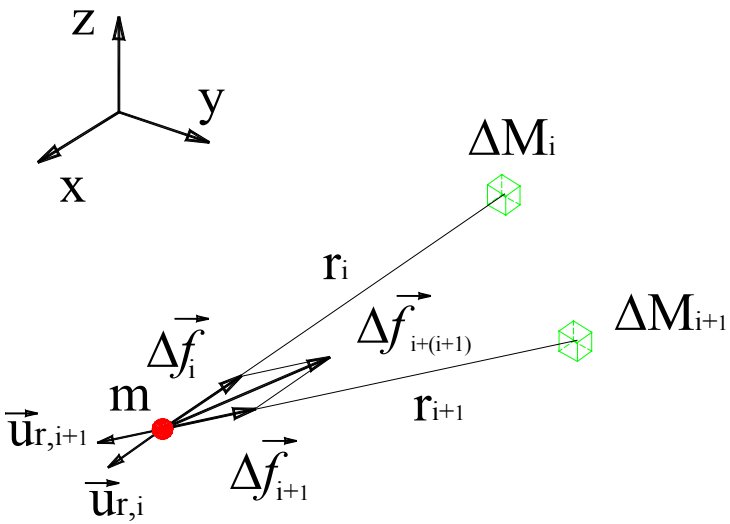


$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$

$$\Delta f_i \approx G \frac{m \Delta M_i}{r_i^2}$$

$$\Delta \vec{f}_i \approx -G \frac{m \Delta M_i}{r_i^2} \vec{u}_{r,i}$$

Una massa non puntiforme



$$\Delta\vec{f}_i \approx -G\frac{m\,\Delta M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r,i}$$

$$\Delta\vec{f}_{i+1} \approx -G\frac{m\,\Delta M_{i+1}}{r_{i+1}^2}\vec{u}_{r,i+1}$$

$$\Delta\vec{f}_{i+(i+1)} = \Delta\vec{f}_i + \Delta\vec{f}_{i+1} \approx -G\frac{m\cdot\Delta M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r,i} - G\frac{m\cdot\Delta M_{i+1}}{r_{i+1}^2}\vec{u}_{r,i+1}$$

Una massa non puntiforme

Indichiamo con $\vec{F}$ la forza totale agente tra la massa M e la massa *m*. Questa forza è data dalla somma di tutte le forze agenti tra *m* e le varie masse ΔM_i.

$$\vec{F} = \Delta\vec{f}_1 + \Delta\vec{f}_2 + \cdots + \Delta\vec{f}_i + \Delta\vec{f}_{i+1} + \cdots + \Delta\vec{f}_N$$

Sostituendo le espressioni delle $\Delta\vec{f}_i$

$$\vec{F} \approx -G\frac{m\Delta M_1}{r_1^2}\vec{u}_{r,1} - G\frac{m\Delta M_2}{r_2^2}\vec{u}_{r,2} - \cdots - G\frac{m\Delta M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r,i} - \cdots - G\frac{m\Delta M_N}{r_N^2}\vec{u}_{r,N}$$

Una massa non puntiforme

Possiamo usare un simbolo per rendere l'espressione precedente più compatta ed elegante: il simbolo di sommatoria Σ. Da cui si ottiene

$$\vec{F} \approx -G\frac{m\Delta M_1}{r_1^2}\vec{u}_{r,1} - G\frac{m\Delta M_2}{r_2^2}\vec{u}_{r,2} - \cdots - G\frac{m\Delta M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r,i} - \cdots - G\frac{m\Delta M_N}{r_N^2}\vec{u}_{r,N}$$

$$\vec{F} \approx \sum_{i=1}^{N}\left(-G\frac{m\Delta M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r,i}\right) = -Gm\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\Delta M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r,i}\right)\right]$$

Una massa non puntiforme

$$\vec{F} \approx \sum_{i=1}^{N} \left(-G \frac{m \Delta M_i}{r_i^2} \vec{u}_{r,i} \right)$$

A noi interessa ottenere la forza effettiva e non un'approssimazione. Per cui dobbiamo cercare una strada che ci consenta di sostituire il circa ≈ con l'uguale =

Facendo tendere a zero i volumetti e perciò le masse ΔM_i in questi contenute l'errore sulla valutazione delle distanze r_i tende a zero. Per far questo dobbiamo far tendere ad infinito il numero N di suddivisioni del corpo di massa M

Una massa non puntiforme

Possiamo scrivere

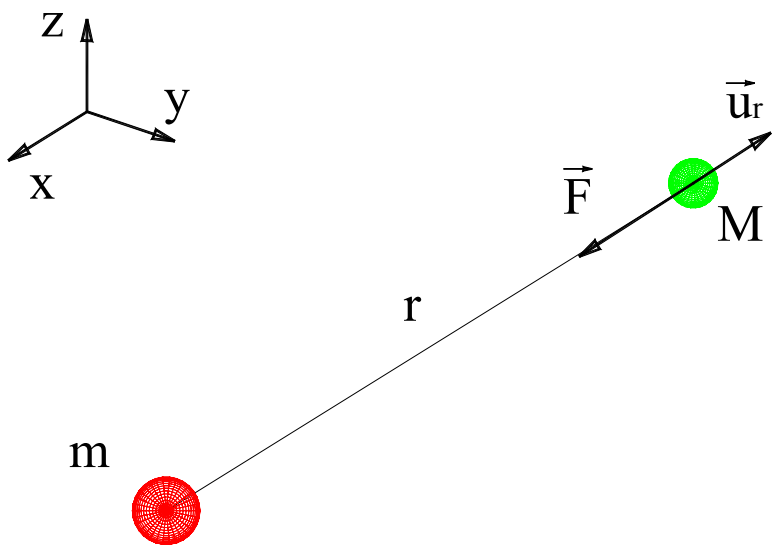
$$\vec{F} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta M_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{N} \left(-G \frac{m \Delta M_i}{r_i^2} \vec{u}_{r,i} \right)$$

Per definizione questo limite è l'integrale

$$\vec{F} = \int_0^M -G \frac{m dM}{r^2} \vec{u}_r = -Gm \int_0^M \frac{dM}{r^2} \vec{u}_r$$

Casi particolari

Massa di forma sferica con densità costante



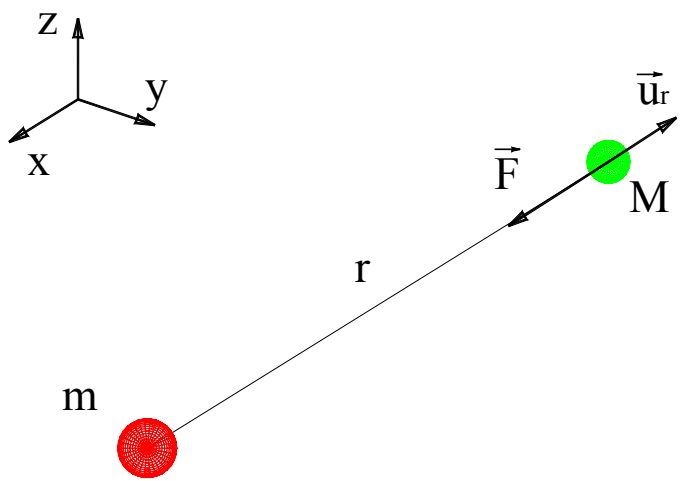
$$\vec{F} = -Gm\int_0^M \frac{dM}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$$

Per la forza gravitazionale la massa M appare tutta concentrata al centro, come se fosse puntiforme

Casi particolari

Massa di forma sferica costituita da gusci sferici concentrici di densità costante anche se diversa da guscio a guscio



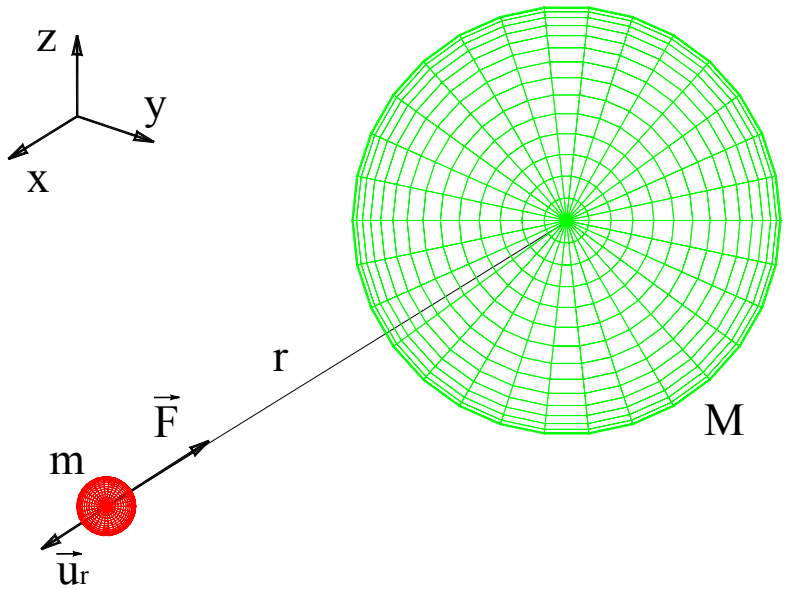
$$\vec{F} = -Gm\int_0^M \frac{dM}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$$

Per la forza gravitazionale la massa M appare tutta concentrata al centro, come se fosse puntiforme.

Accelerazione di gravità **g**

La terra può essere considerata, con buona approssimazione, come una formazione di gusci sferici concentrici a densità costante all'interno di ciascun guscio.



$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$$

In vicinanza della superficie terrestre

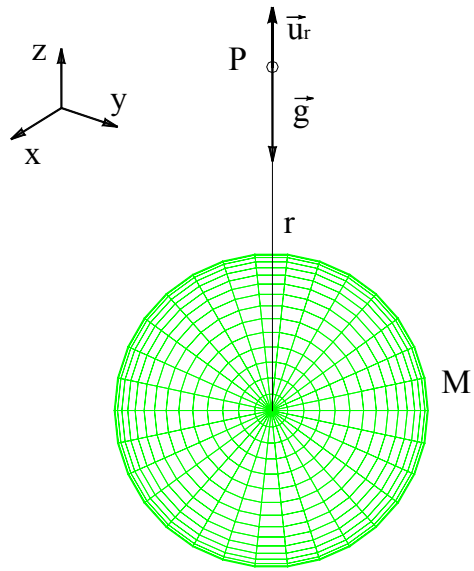
$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$$g \cong 9.81\ m/s^2$$

Accelerazione di gravità **g**

$$-G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r = m\vec{g}$$

$$-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = \vec{g}$$



A livello del mare
$r = R$ (raggio terrestre)

$$g = G\frac{M}{R^2} = 9.81 \ \ m/s^2$$

Campo Gravitazionale ***H***

In Fisica, per Campo si intende una regione di spazio in ogni punto della quale è definita una precisa grandezza fisica.

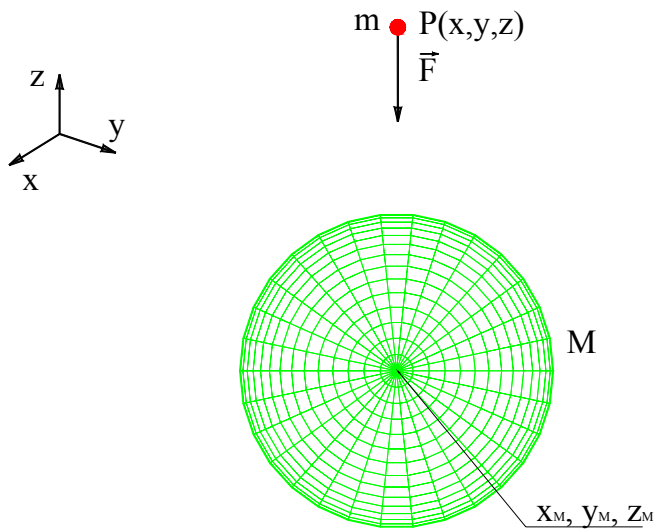
Se la grandezza è scalare, si ha un campo scalare.

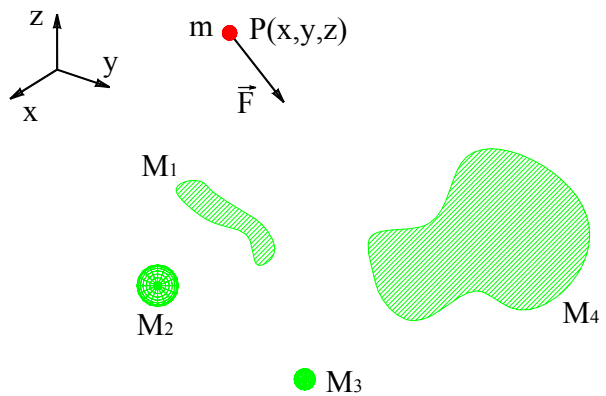
es: temperatura

Se la grandezza è vettoriale, si ha un campo vettoriale.

es: velocità, forza

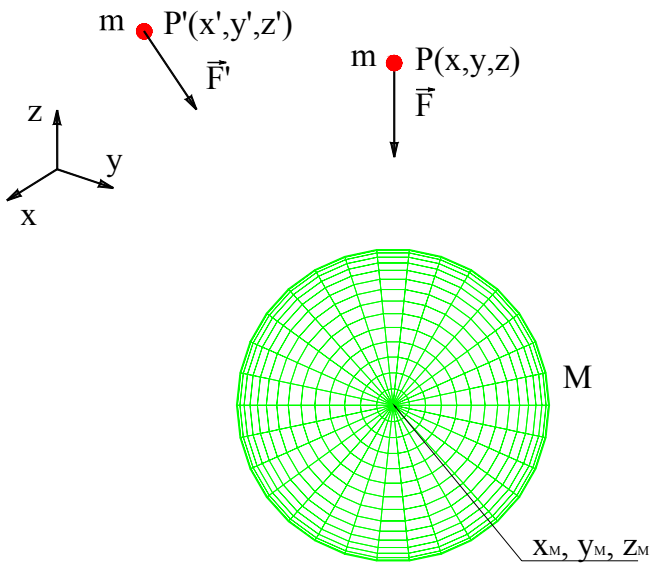
Campo Gravitazionale ***H***

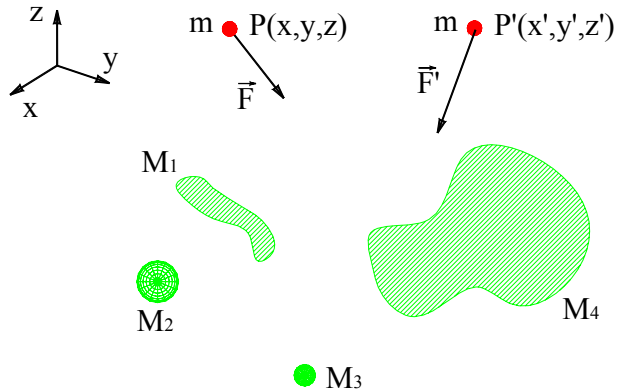




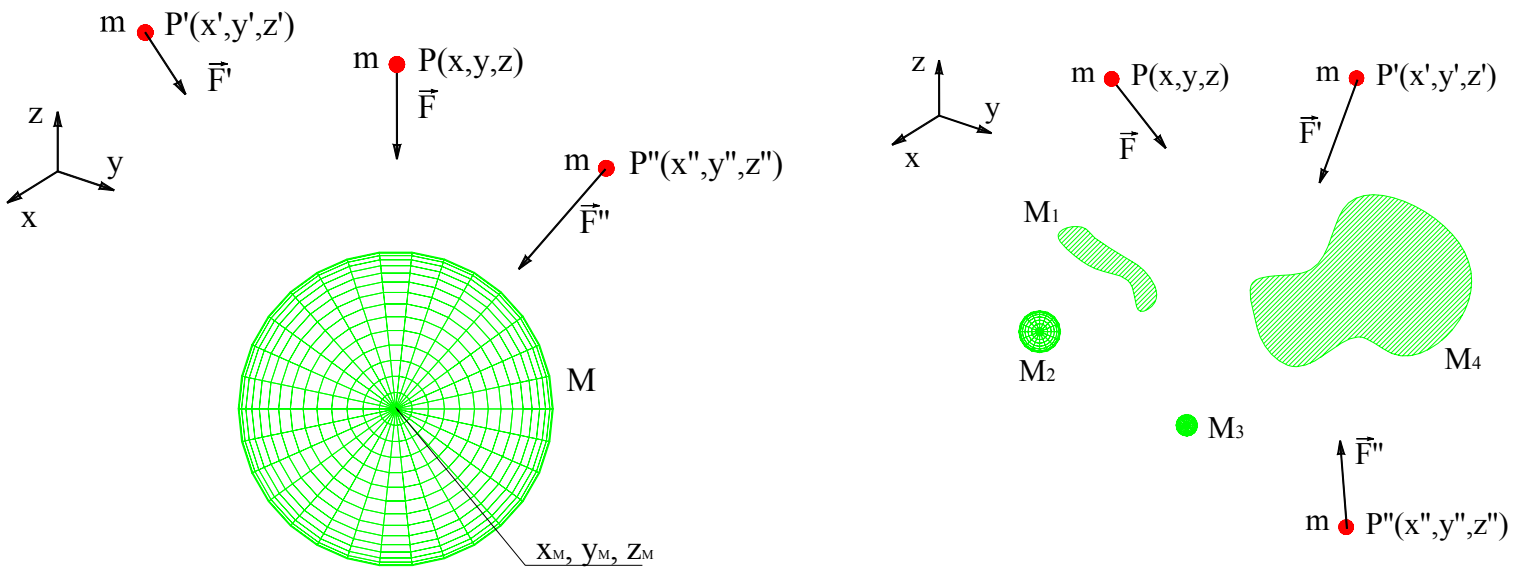
Le masse sono in posizioni fisse. Il campo gravitazionale è statico, cioè non dipende dal tempo, ma solo dalla posizione

Campo Gravitazionale ***H***





Campo Gravitazionale ***H***



Campo Gravitazionale ***H***

Definiamo come Vettore del Campo Gravitazionale o semplicemente Campo Gravitazionale $\vec{H}$ il rapporto tra la forza gravitazionale totale $\vec{F}$ agente sulla massa *m* e la stessa massa *m*

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m}$$

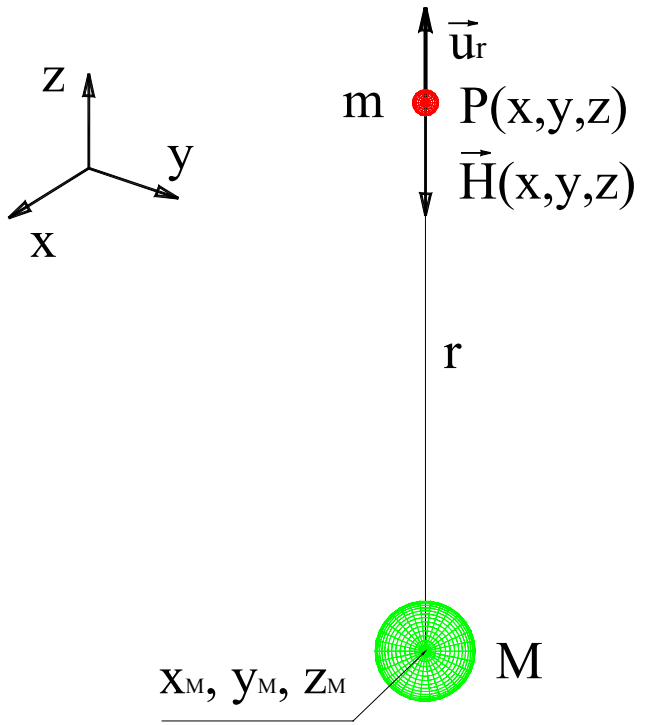
L'unità di misura di ***H*** nel S.I. delle unità di misura è il N/kg

Campo Gravitazionale ***H*** di una massa puntiforme

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$$

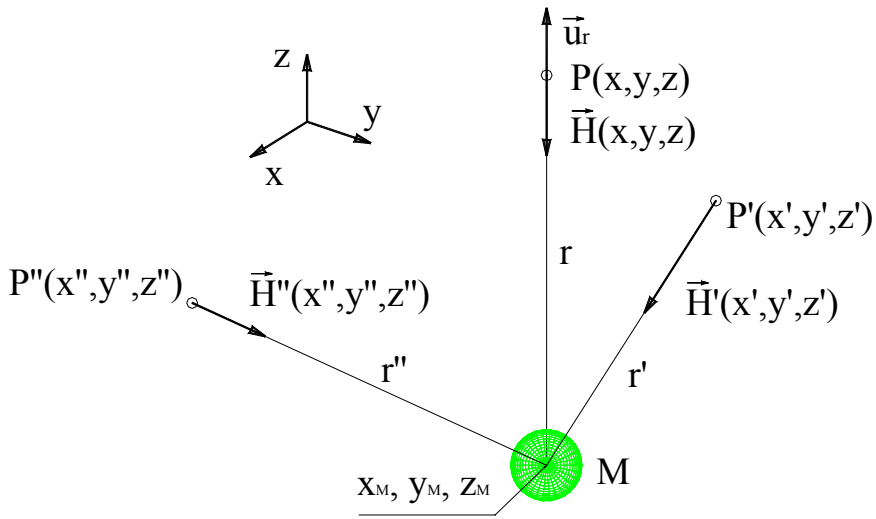
$$\vec{H}(x,y,z) = -G\frac{mM}{mr^2}\vec{u}_r = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$



$$r = \sqrt{(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 + (z-z_M)^2}$$

Campo Gravitazionale ***H*** di una massa puntiforme

$$\vec{H}(x,y,z) = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$



Il campo gravitazionale generato da più masse puntiformi è la somma vettoriale dei campi generati da ciascuna massa.

Significato del Campo Gravitazionale

Una massa o un insieme di masse, estendono la loro influenza in una regione di spazio attorno alla loro posizione. Queste masse generano un Campo Gravitazionale, la cui intensità dipende dalle masse stesse. Il Campo agisce su ogni massa che si venga a trovare in questa regione esercitando su di essa una forza di attrazione gravitazionale. Questo campo, svolge una funzione di intermediazione attraverso cui ogni massa agisce sulle altre.

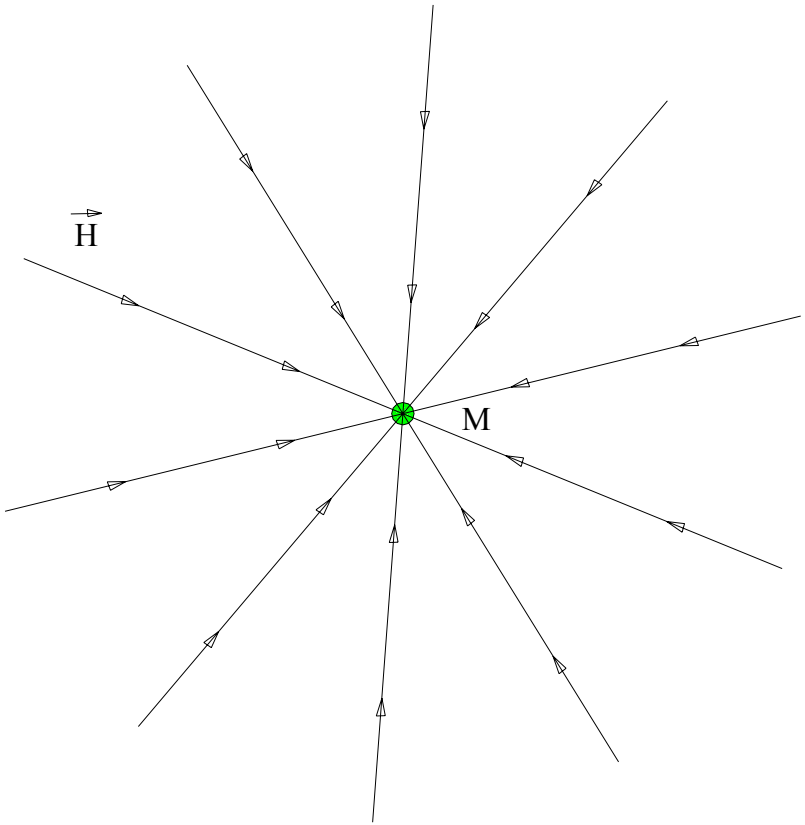
Linee di forza del Campo Gravitazionale

Le linee di forza del campo gravitazionale (esistono linee analoghe per altri campi di forze) ci aiutano ad avere una visione qualitativa d'insieme del campo.

Le linee di forza sono linee a cui il campo gravitazionale ***H*** è tangente in ogni loro punto.

Vediamo come sono le linee di forza di una massa e di due masse puntiformi.

Linee di forza del Campo Gravitazionale



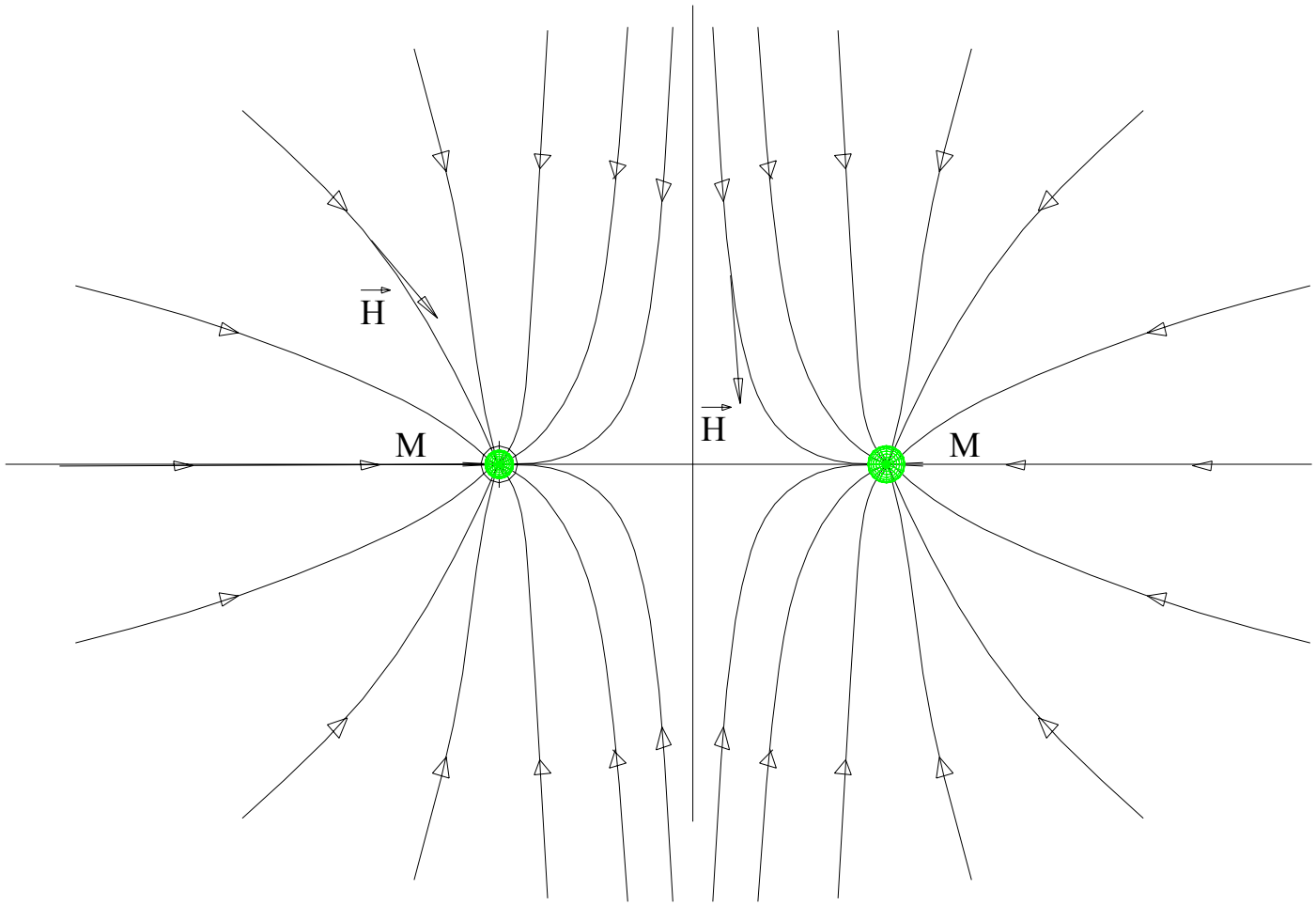
Il campo giace sulle linee di forza.

Le linee di forza sono radiali

Il campo è più intenso, cioè di modulo più elevato, laddove le linee di forza sono più addensate.

La massa funge da pozzo delle linee di forza.

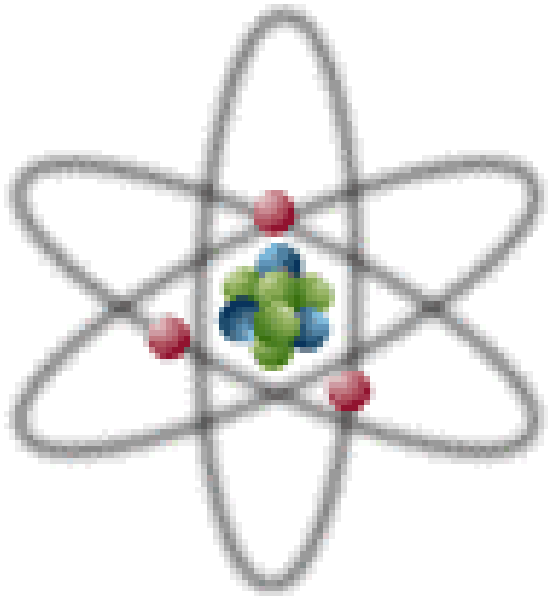
Linee di forza del Campo Gravitazionale



Introduzione all'Elettrostatica

Forza di Coulomb

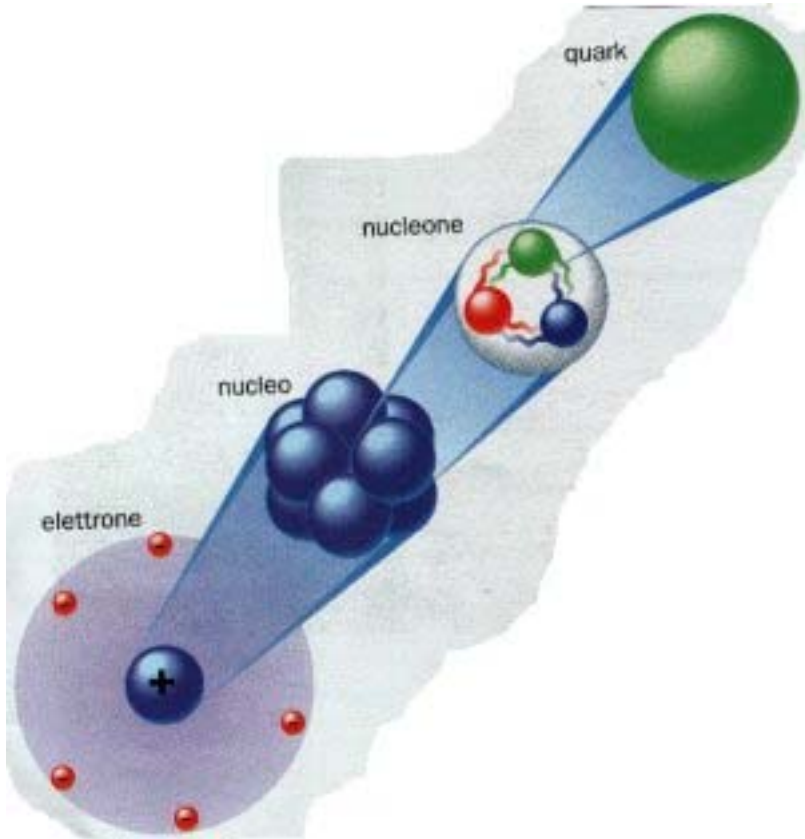
L’atomo



L’atomo è costituito da un nucleo, dove è praticamente concentrata tutta la massa, e dagli elettroni che orbitano attorno al nucleo.

Le particelle costituenti l'atomo

- Il nucleo è costituito dai nucleoni:
  - Il protone
  - Il neutrone
- I nucleoni sono costituiti da tre quark.
  - p [uud]
  - n [ddu]
- Masse
  - $M_p = 1.67262158\ 10^{-27}$ Kg
  - $M_n = 1.67492715\ 10^{-27}$ Kg
  - $m_e = 9.10938188\ 10^{-31}$ Kg



Dimensioni dell'atomo

- Diametro di un atomo medio: $\square 10^{-10}$ m
- Diametro di un nucleo medio ($r = R_0 \cdot A^{1/3}$): $\square 5 \cdot 10^{-15}$ m
  $R_0 \cdot \approx 1.35 \cdot 10^{-15}$ m
- Diametro dell'elettrone: $< 10^{-17}$ m

- Se il nucleo avesse il diametro di 5 m, l'elettrone sarebbe una sferetta di diametro inferiore ad 1 cm e orbiterebbe ad una distanza media di 50 km dal nucleo.

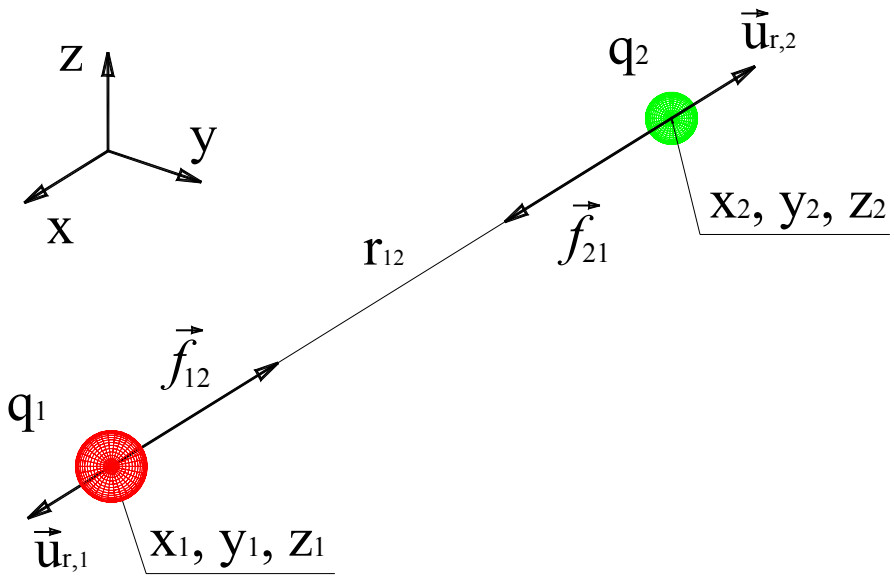
- Z = numero atomico $\rightarrow$ indica il numero di protoni (= n. di elettroni)
- N $\rightarrow$ indica il numero di neutroni
- A = numero di massa $\rightarrow$ N + Z
- Il numero di protoni è uguale al numero di elettroni

Carica elettrica

- L'elettrone porta una carica elettrica negativa $e = -1.602177335 \cdot 10^{-19}$ C
  (C = Coulomb è l'unità di misura della carica elettrica)
- Il protone porta una carica elettrica positiva, uguale in modulo a quella dell'elettrone.
- La carica elettrica più piccola libera in natura è quella dell'elettrone
- La carica elettrica non si crea ne si distrugge
- Cariche elettriche con lo stesso segno si respingono
- Cariche elettriche con segno opposto si attraggono

La Forza di Coulomb

La forza di Coulomb tra cariche puntiformi.

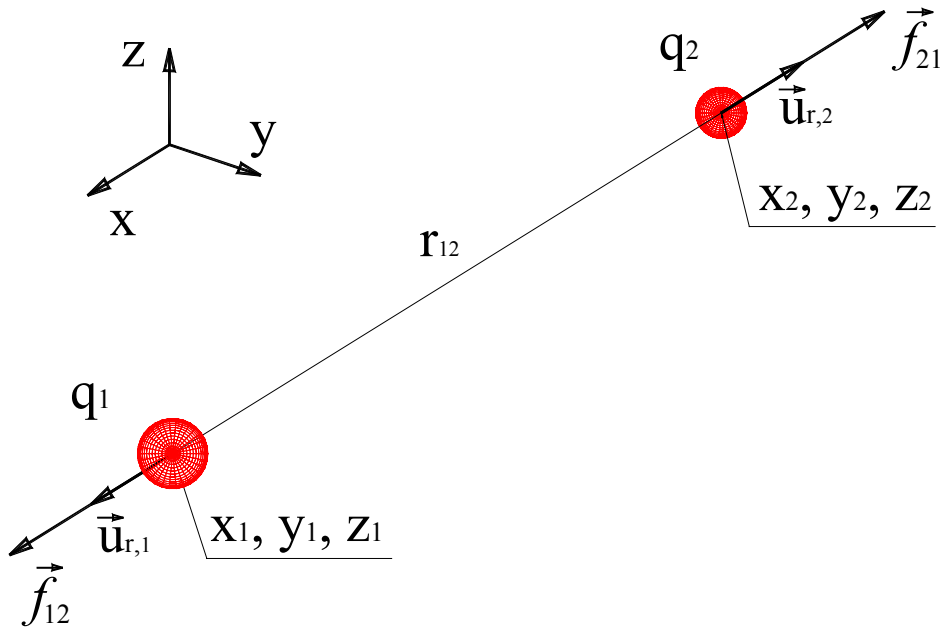


$$\vec{f}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{r,1}$$

$$\vec{f}_{21} = K_e \frac{q_2 q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{r,2}$$

La Forza di Coulomb

La forza di Coulomb tra cariche puntiformi.



$$\vec{f}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{r,1}$$

$$\vec{f}_{21} = K_e \frac{q_2 q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{r,2}$$

La Forza di Coulomb

La forma generale della forza di Coulomb.

$$\vec{f} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875 \cdot 10^9 \ \ Nm^2C^{-2}$$

Costante dielettrica assoluta $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \ \ N^{-1}m^{-2}C^2$

Confronto tra Forza di Coulomb e Forza Gravitazionale

$$\vec{f}_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r \qquad \vec{f}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

La forza di Coulomb o forza elettrostatica, come la forza gravitazionale, è centrale

Confronto tra Forza di Coulomb e Forza Gravitazionale

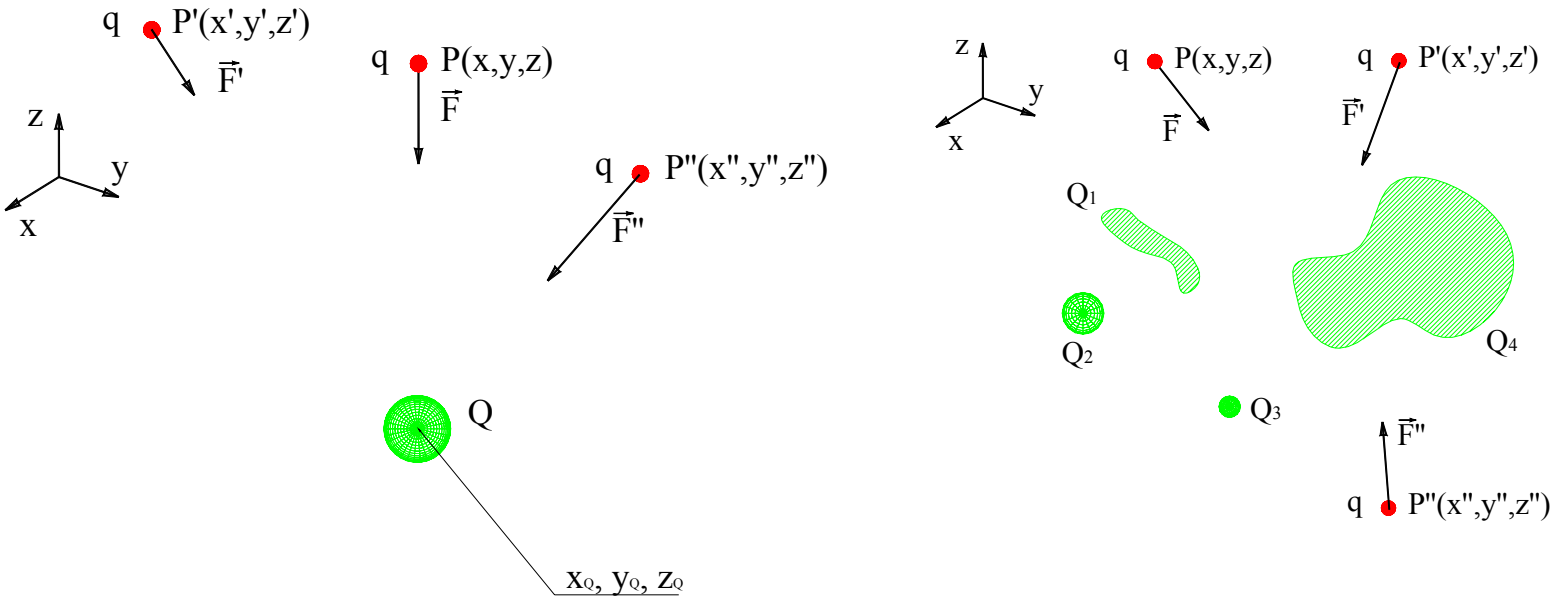
La forza di Coulomb o forza elettrostatica è decisamente più intensa della forza gravitazionale.

Prendiamo due protoni posti a distanza *r* e confrontiamo le loro forze elettrostatica e gravitazionale.

$$\frac{f_e}{f_g} = \frac{K_e \dfrac{q_1 q_2}{r^2}}{G \dfrac{m_1 m_2}{r^2}} = \frac{K_e}{G} \frac{q^2}{m^2} \cong 4.1 \cdot 10^{34}$$

Campo Elettrostatico

Il Campo Elettrostatico è il campo generato da cariche elettriche che si trovano in posizioni fisse, cioè la loro posizione non dipende dal tempo. Questo campo dipende solo dalla posizione.



Campo Elettrostatico

Definiamo come Vettore del Campo Elettrostatico o semplicemente Campo Elettrostatico $\vec{E}$ il rapporto tra la forza elettrostatica totale $\vec{F}$ agente sulla carica q e la carica q stessa (con q ? 0 per non alterare il campo delle cariche)

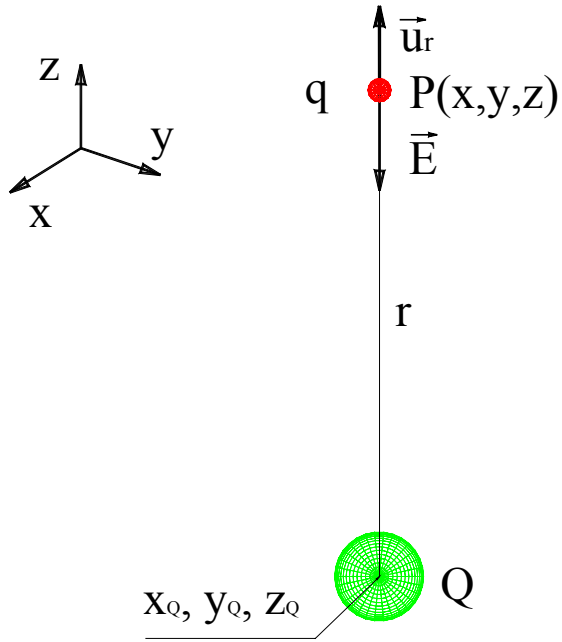
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Campo Elettrostatico di una carica puntiforme

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{F} = K_e \frac{qQ}{r^2}\vec{u}_r$$

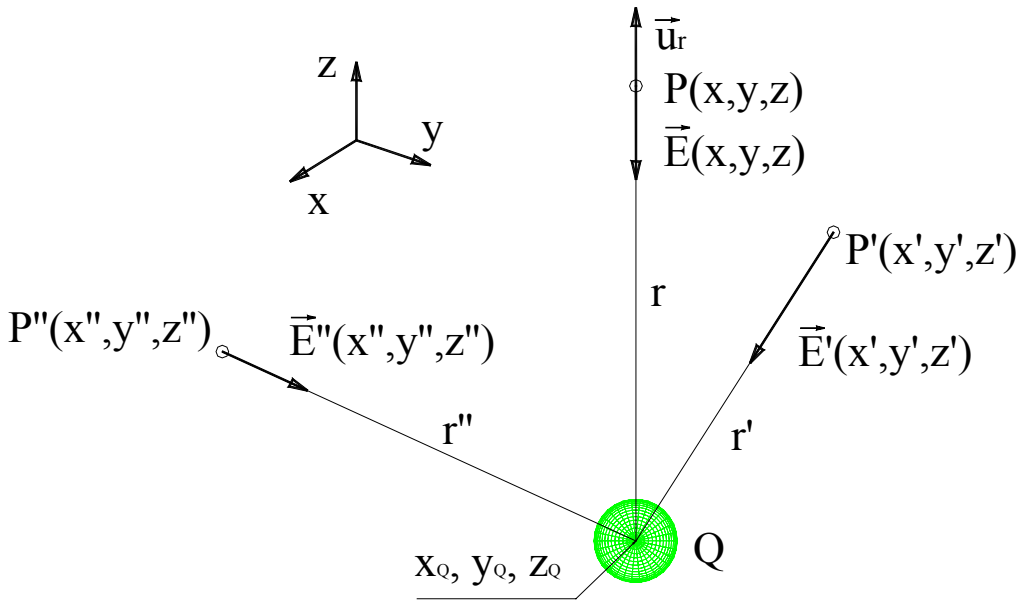
$$\vec{E}(x,y,z) = K_e \frac{qQ}{qr^2}\vec{u}_r = K_e \frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$



$$r = \sqrt{(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2 + (z-z_Q)^2}$$

Campo Elettrostatico di una carica puntiforme

$$\vec{E}(x,y,z) = K_e \frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

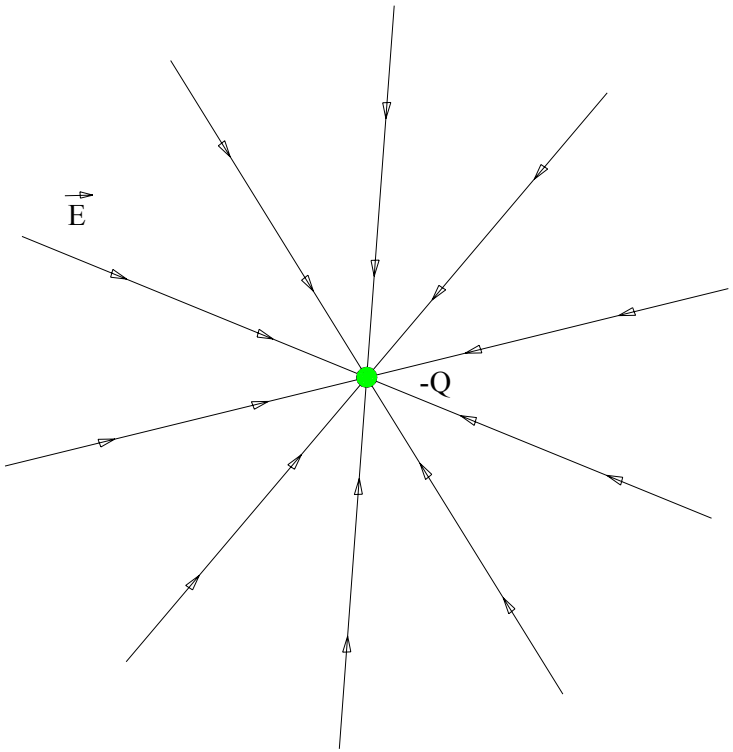


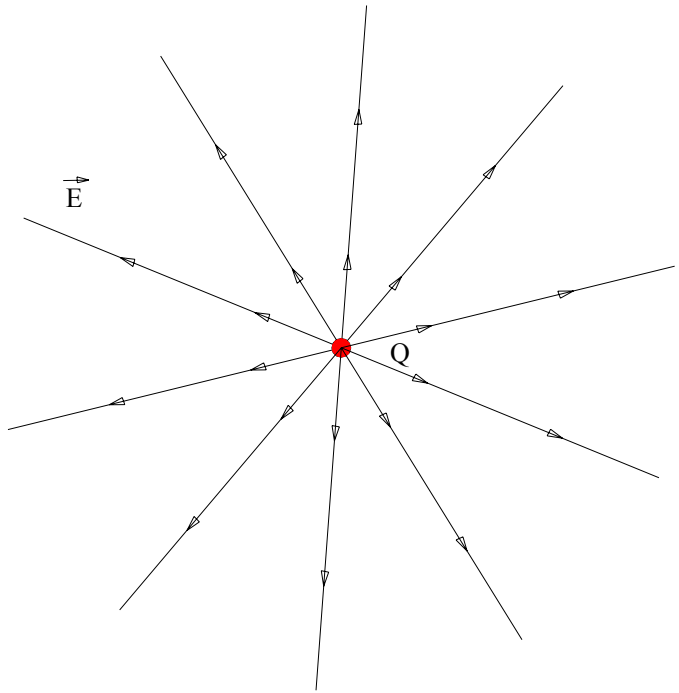
Il campo elettrostatico generato da più cariche puntiformi è la somma vettoriale dei campi generati da ciascuna carica.

Significato del campo Elettrostatico

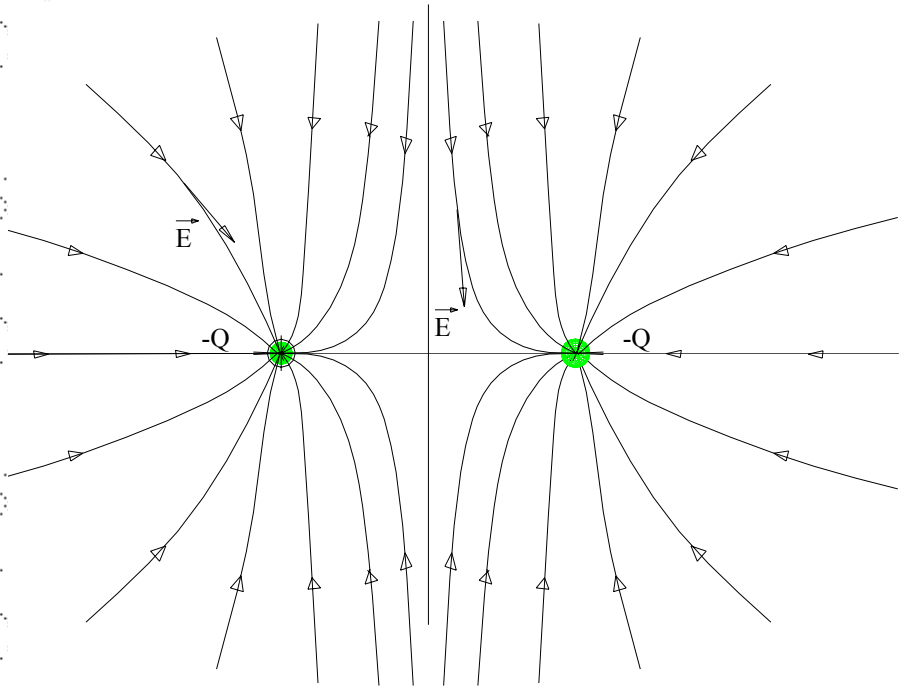
Una carica o un insieme di cariche, estendono la loro influenza in una regione di spazio attorno alla loro posizione. Queste cariche generano un Campo Elettrostatico, la cui intensità dipende dalle cariche stesse. Il Campo agisce su ogni carica che si venga a trovare in questa regione esercitando su di essa una forza di attrazione o repulsione. Questo campo, svolge una funzione di intermediazione attraverso cui ogni carica agisce sulle altre.

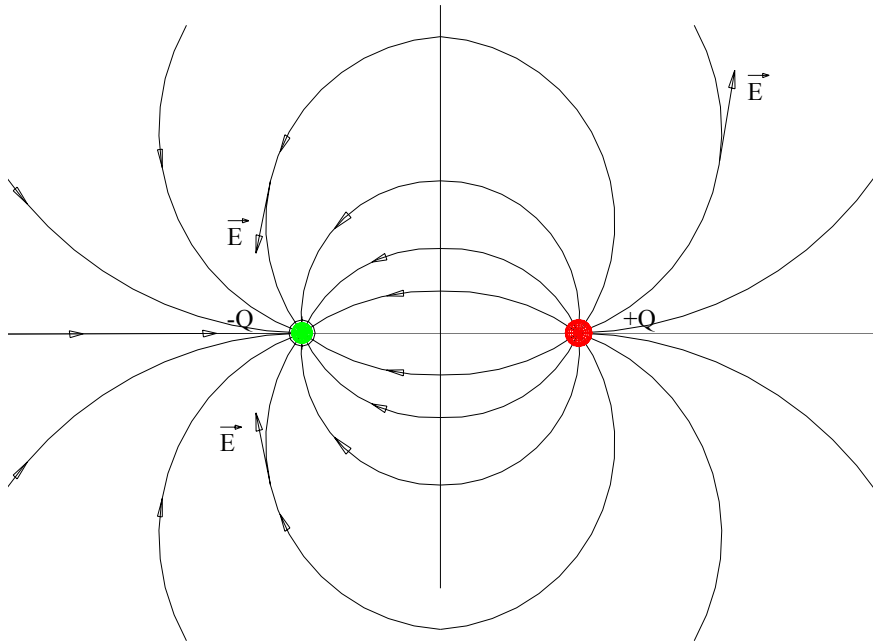
Linee di forza del Campo Elettrostatico





Linee di forza del Campo Elettrostatico





La carica negativa appare come un pozzo del campo elettrico, mentre la carica positiva appare come sorgente di campo